جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الفصل الثاني للعام الدراسي 2017/2016

العلامة : 100
المدة : ساعة ونصف
اسم الطالب :

السؤال الأول : (20 علامة)

أ) لتكن $(\mathbb{R},\leq)$ السلسلة العادية ، ولتكن $A=[1,3[\cup[4,6]$ و $B=[1,3[$ أوجد $sup_{\mathbb{R}}B$, $sup_{\mathbb{R}}A$, $sup_{A}B$.

ب) إذا كانت المجموعة $A=\{2,3,6,7,9,42\}$ مجموعة جزئية من $(N^*,|)$ ، ارسم مخطط تمثيلي للمجموعة A .

ت) لتكن E مجموعة ما ، ولتكن الشبكة $(P(E),\subseteq)$ ، اثبت أن الأسرة $FC(E)$ المؤلفة من المجموعات المنتهية أو المنتهية المتمم من E تكون شبكة جزئية من $(P(E),\subseteq)$.

السؤال الثاني : (20 علامة)

أ) إذا كان a عنصراً ثابتاً في الشبكة $(E,\leq)$ وإذا كانت F_a مجموعة جزئية من E معرفة بالشكل $F_a=\{x\in E, x\geq a\}$ ، فاثبت أن F_a مرشحة في E .

ب) اثبت أنه في أي شبكة $(E,\leq)$ فإن المتراجحتين التاليتين محققتين دوماً

$x\wedge(y\vee z)\geq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\ ;\ \forall x,y,z\in E$ و

$x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)\ ;\ \forall x,y,z\in E$

ت) في السلسلة $E_1=\{1,2,3,4,5\}$ المرتبة بالترتيب العادي المألوف أوجد متممي 2 و 4 (إن وجدا)

في الشبكة $E_2=\{1,2,4,5,20\}$ المرتبة بعلاقة يقسم ، أوجد متممي 2 و 4 (إن وجدا)

في الشبكة $E_3=\{1,2,3,5,30\}$ المرتبة بعلاقة يقسم ، أوجد متممي 2 و 3 (إن وجدا)

السؤال الثالث : (20 علامة)

أ) في الشبكة E نقول عن المرشحة F أنها أولية إذا كان $x\vee y\in F$ فإنه إما $x\in F$ أو $y\in F$ واثبت أنه في أي شبكة توزيعية كل فوق مرشحة تكون مرشحة أولية .

ب) إذا كان f إيزومورفيزم بولياني من الحلقة البوليانية A على الحلقة البوليانية B فاثبت أن التطبيق العكسي f^{-1} يكون إيزومورفيزم بولياني من B على A .

السؤال الرابع : (20 علامة)

أ) إذا كانت F مرشحة فعلية في الحلقة البوليانية A ، فاثبت صحة التكافؤ التالي :
(من أجل أي $x\notin F$ فإن $x'\in F$ $\Leftrightarrow$ F فوق مرشحة)

ب) إذا كان f مورفيزم بولياني من الحلقة البوليانية A في الحلقة البوليانية B وإذا كانت F مرشحة في B ، فاثبت أن $f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A .

السؤال الخامس : (20 علامة)

ليكن A جبر بولياني و a,b عنصرين ثابتين في A ولتكن المعادلة $ax+b=0$ في A .

أ) برهن أنه يكون للمعادلة السابقة حلول إذا وفقط إذا كان $b\leq a$.

ب) بفرض أن مجموعة الحلول تحقق المتراجحة المزدوجة $b\leq x\leq a+b+1$ حل المعادلة $10x+5=0$ في $D(210)$.

$5\leq x\leq 210$

حمص في 12 / 6 / 2017

د . عصام تسيم

$x+y=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$

1

سلم تصحيح مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - ج
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول: 20

أ) $\sup_A B = 4$ (3) $\sup_{\mathbb{R}} A = 6$ (3) $\sup_{\mathbb{R}} B = 3$ (3)

ب) (3)

42, 6, 7, 9, 2, 3

ج) - إذا كانت $A, B \subseteq E$ منتهية فإن $A \cap B$ ، $A \cup B$ منتهية وبالتالي تنتميان إلى $FC(E)$.
- إذا كانت $A, B \subseteq E$ منتهي المتمم فإن كل من CA ، CB منتهية وبالتالي فإن $CA \cap B = CA \cup CB$ و $CA \cup B = CA \cap CB$ كل منهما منتهية وبالتالي فإن $A \cap B$ ، $A \cup B$ ينتميان إلى $FC(E)$ (4)
- إذا كانت $A, B \subseteq E$ بحيث أن A منتهية و B منتهية المتمم فإن $A \cap B$ تكون منتهية بينما $CA \cup B = CA \cap CB$ تكون أيضاً منتهية أي أن $A \cup B$ منتهية المتمم وبالتالي كل من $A \cap B$ ، $A \cup B$ ينتمي إلى $FC(E)$ ففي جميع الأحوال $A \cap B$ ، $A \cup B$ ينتمي إلى $FC(E)$ أي أن $FC(E)$ شبكة جزئية من $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. (4)

السؤال الثاني: 20

أ) - إذا كان $x \in F_a$ ، $y \geq x$ فإن $y \geq x \geq a \Leftarrow y \in F_a$
إذا كان $x \in F_a$ ، $y \in F_a \Leftarrow x \geq a$ ، $y \geq a \Leftarrow x \wedge y \geq a$
$\Leftarrow x \wedge y \in F_a$ ومنه نستنتج أن F_a مرشحة في E (6)

ب)

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge y \\ x \wedge (y \vee z) \geq x \wedge z \end{array}\right\} \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$ (4)

$$\left.\begin{array}{l} x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y \\ x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z \end{array}\right\} \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$ (4)

ج) في الشبكة E_1، العنصرين 2، 4 لا يملكان متممات. (1)

د) في الشبكة E_2 ان العنصر 5 هو متمم كل من 2، 4 (1)

في الشبكة E_3 ان متمم 2 هو كل من العنصرين 3، 5 ومتمم 3 هو العنصرين 2، 5. (1)

السؤال الثالث: [20]

أ) بفرض أن E شبكة توزيعية ما، F خود مرشحة فيها ولنكن

ولنفرض جدلاً أن F ليست أولية أي أن $x \notin F$ و $y \notin F$

يكون بما أن $x \notin F$ يوجد عنصر $x_1 \in F$ بحيث يكون $x_1 \wedge x = 0$

ومنه

$$x_1 \wedge (x \vee y) = (x_1 \wedge x) \vee (x_1 \wedge y) = 0 \vee (x_1 \wedge y) = x_1 \wedge y \in F$$

لأن كل من x_1 و $x \vee y$ ينتمي الى F وهذا تناقض لأن $y \notin F$

اذن الفرض الجدلي خاطئ أي انه يجب أن يكون إما $x \in F$ أو $y \in F$ أي تكون F أولية. (5) (5)

ب) ليكن $x_1, y_1 \in B \Rightarrow$ يوجد $x, y \in A$ بحيث يكون $x_1 = f(x)$، $y_1 = f(y)$

ومنه $x = f^{-1}(x_1)$ و $y = f^{-1}(y_1)$ يكتبان بشكل وحيد

$$f(x)f(y) = f(x \cdot y) \Rightarrow xy = f^{-1}(x_1 y_1) \Rightarrow f^{-1}(x_1) f^{-1}(y_1) = f^{-1}(x_1 y_1)$$

$$(f(x))' = f(x') \Rightarrow x' = f^{-1}(x_1') \Rightarrow (f^{-1}(x_1))' = f^{-1}(x_1')$$

وبالتالي فإن f^{-1} ايزومورفيزم بولياني. (7)

السؤال الرابع: [20]

أ) - بفرض أن F خود مرشحة و $x \notin F$ فحسب مبرهنة توجد $y \in F$

يكون $xy = 0 \Rightarrow y \leq x' \Rightarrow x' \in F$.

اذا كان $x \notin F$ فإن $x' \in F$ ولدينا دوماً $x x' = 0$ ⟸ (10) مرشحة. (من المبرهنة: اذا كان $x \notin F$ فيوجد $y \in F$ بحيث $xy = 0$ مرشحة).

ج) نبين أن F مرشحة في B

- بما أن $f(1)=1\in F \Leftarrow 1\in f^{-1}(F)$

- بفرض أن $x\in f^{-1}(F)$ ، $y\geq x \Leftarrow f(y)\geq f(x)$ و $f(x)\in F \Leftarrow$

$f(y)\in F \Leftarrow y\in f^{-1}(F)$.

- بفرض أن $x\in f^{-1}(F)$ ، $y\in f^{-1}(F) \Leftarrow f(x)\in F$ و $f(y)\in F$

$\Leftarrow f(x)f(y)\in F \Leftarrow f(xy)\in F \Leftarrow xy\in f^{-1}(F)$ (10)

ومنه فإن $f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A .

السؤال الخامس: (20)

أ)- بفرض أن المعادلة $ax+b=0$ حلول عندئذ توجد $x\in A$ تحقق

المعادلة $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=b$ أي أن $b\leq a$

- بفرض أن $b\leq a$ فإن $ab=b \Leftrightarrow ab+b=0$ أي أن

$x=b$ هو حل للمعادلة $ax+b=0$ (10)

ب) $10x+5=0$ إن الحل يعطى بالمتراجحة

$\Leftrightarrow 5\leq x\leq 10+42 \Leftrightarrow 5\leq x\leq 10+5+210$

$\Leftrightarrow 5\leq x\leq (10\cdot 5)\vee(21\cdot 42) \Leftrightarrow 5\leq x\leq (10\cdot 42')\vee(10'\cdot 42)$

$5\leq x\leq 5\vee 21 \Leftrightarrow 5\leq x\leq 105$

(10)

اذن مجموعة الحلول $\{5,15,35,105\}$

د. عصام نسيم